小学教育专业核心课程《概率论与数理统计》题库20250616

一、填空题

1、从装有3只红球、1只白球的袋中任取两球，记事件A="取到1只红球和1只白球"，则P(A)=______。（答案：1/2）

2、袋中有4只黑球和2只黄球，任取两球，记事件B="两球颜色相同"，则P(B)=______。（答案：7/15）

3、从5只蓝球和3只绿球的袋中随机取出两球，记事件C="至少取到1只绿球"，则P(C)=_____。（答案：9/14）

4、袋中有编号1-5的5个球，任取两个，记事件D="两球编号之和为偶数"，则P(D)=______。（答案：2/5）

5、在概率论中，__________是指所有可能结果的集合。（答案：样本空间）

6、若事件A与事件B不能同时发生，则称这两个事件为__________。（答案：互斥事件/互不相容事件）

7、设A、B为随机事件，P(A|B)表示在事件B发生的条件下事件A发生的__________。（答案：条件概率）

8、若随机变量X服从参数为λ的泊松分布，则其方差等于__________。（答案：λ）

9、在正态分布N(μ,σ²)中，曲线关于直线__________对称。（答案：x=μ）

10、若P(A)=0.3，P(B)=0.4，且A与B独立，则P(A∩B)=__________。（答案：0.12）

11、统计学中，__________是指从总体中抽取的部分个体的集合。（答案：样本）

12、若随机变量 X 的期望 E(X)=5，则 E(2X+3)=__________。（答案：13）

13、假设检验中，原假设通常用符号__________表示。（答案：H_0 ）

14、在掷一枚骰子的试验中，"出现点数大于 4"称为______事件。（答案：随机）

15、若某事件在试验中必然发生，则称该事件为______事件。（答案：必然）

16、在概率论中，每次试验可能出现也可能不出现的结果称为______。（答案：随机事件）

17、"明天下雨"这一现象在概率论中属于______事件。（答案：随机）

18、样本空间中所有可能结果的集合称为______空间。（答案：样本）

19、若事件 A 与事件 B 相互独立，则 P(A∩B) = ______。（答案：P(A)×P(B)）

20、设 X 与 Y 为两个独立的随机变量，其方差分别为 D(X)=4，D(Y)=9，则 D(X-Y) = ______。（答案：13）（独立变量方差性质：D(X±Y)=D(X)+D(Y)）

21、若 P(A)=0.3，P(B)=0.5，且 A 与 B 互斥，则 P(A∪B) = ______。（答案：0.8）（互斥事件概率公式：P(A∪B)=P(A)+P(B)）

22、对于标准正态分布 Z~N(0,1)，P(Z≤1.96) ≈ ______。（保留 4 位小数）（答案：0.9750）

23、若随机变量 X 服从参数为λ的泊松分布，则其期望 E(X) = ______。

（答案：λ）

24、对于相互独立的事件A和B，若P(A)=p，P(B)=q，则P(A|B) = ______。（答案：p）

25、若随机变量X~N(0,1)，Y~N(0,1)且独立，则X+Y服从的分布为______。（答案：N(0,2)）

26、对于互斥事件A和B，概率的加法公式可简化为：P(A∪B) = ______。（答案：P(A) + P(B)）

27、若事件A与事件B互斥且P(A) = 0.3，P(B) = 0.4，则P(A∩B) = ______。（答案：0）

28、互斥事件的定义中，关键条件是A∩B = ______。（答案：空集（或∅））

29、若两个事件互斥且非空，则它们在样本空间中的关系是______。（答案：不相交（或无公共样本点））

30、若事件X与事件Y相互独立，且P(X)=0.5，P(Y)=0.6，则P(XY)=____（答案：0.3）

31、已知事件M和N独立，P(M)=0.2，P(M∪N)=0.44，则P(N)=____（答案：0.3）

32、设独立事件C的概率P(C)=0.7，事件D的概率P(D)=0.5，则P(C∪D)=____（答案：0.85）

33、若P(E)=0.4，P(F)=0.8，且E与F独立，则P(E|F)=____（答案：0.4）

34、独立事件G和H满足P(G)=0.25，P(H)=0.4，则P(G∩H)=____（答

案：0.1）

35、已知 P(K)=0.6，P(L)=0.3，且 K 与 L 独立，则 P(K-L)=____（注：K-L 表示 K 发生且 L 不发生）（答案：0.42）

36、设 P(A)=0.3，P(B)=0.4，若 A 与 B 独立，则 P(A∪B) = ______。（答案：0.58）

37、若事件 A 与 B 满足______，则称 A 与 B 互斥。（答案：A∩B=∅（或"不能同时发生"））

38、若 P(A|B) = P(A)，则说明事件 A 与 B 的关系是______。（答案：相互独立）

39、对于任意事件 A，P(A|A)的值为______。（答案：1）

40、若 A 与 B 独立，且 P(A)=0.5，P(B)=0.2，则 P(A-B) = ______。（答案：0.4）

41、若 A⊂B，则 P(A|B) = ______。（答案：P(A)/P(B)）

42、两事件互斥且概率均大于 0 时，这两个事件的关系一定是______的。（填"独立"或"不独立"）（答案：不独立）

43、P(A)+P($\overline{A}$) = ______。（$\overline{A}$表示 A 的对立事件）（答案：1）

44、若 A 与 B 独立，则$\overline{A}$与$\overline{B}$的关系是______。（答案：相互独立）

45、设 A、B 是样本空间Ω中的随机事件，则(A∪B)∩A 的简化结果为______。（答案：A）

46、对任意随机事件 A，A∪$\overline{A}$的运算结果为______（其中$\overline{A}$表示 A 的补集）。（答案：Ω（样本空间））

47、根据德摩根律，$\overline{(A\cap B)}$ = ______（用并集和补集表示）。（答

案：$\overline{A}\cup\overline{B}$）

48、若 P(A|B)=0.6 且 P(B)=0.5，则 P(A∩B) = ______。（答案：0.3）

49、设 A⊆B，则 P(A)与 P(B)的关系为______。（答案：P(A)≤P(B)）

50、若 P(A∩B)=0.2，P(A)=0.5，P(B)=0.4，则 P(A∪B) = ______。（答案：0.7）

51、当且仅当______时，事件 A 与 B 称为相互独立。（答案：P(AB)=P(A)P(B)）

52、设随机变量 X 服从参数λ=3 的泊松分布，则 P(X=2)=______。（已知 e^{-3}≈0.0498）（答案：$3^2e^{-3}/2!$≈0.224）

53、若随机变量 X~P(λ)，且 E(X)=4，则 D(X)=______。（答案：4）

54、设某电话总机每分钟接到的呼叫次数 X 服从λ=5 的泊松分布，则 P(X≤1)=______。（保留四位小数，已知 e^{-5}≈0.0067）（答案：P(X=0)+P(X=1)=e^{-5}+5e^{-5}≈0.0402）

55、在假设检验中，当原假设 H_0 为真时，拒绝 H_0 的错误称为______错误。（答案：第一类（或弃真））

56、假设检验的显著性水平α通常取值不超过______。（答案：0.05（或 5%））

57、t 检验适用于总体方差______且样本量较小时的情形。（答案：未知）

58、假设检验的两类错误中，第二类错误是指______。（答案：取伪（或接受错误的原假设））

59、正态总体均值检验时，当总体方差已知应使用______统计量。（答

案：Z）

60、若检验统计量的观测值落入______，则拒绝原假设。（答案：拒绝域）

61、设离散型随机变量 X 的分布律为 P{X=k}=1/6 (k=1,2,3,4,5,6)，则 P{X≤3}=______。（答案：1/2）

62、若离散型随机变量 Z 满足 P{Z=n}=c/2^n (n=1,2,3)，则常数 c=______。（答案：8/7）

63、设随机变量 W 的分布律为 P{W=k}=k/10 (k=1,2,3,4)，则 P{2<W≤4}=______。（答案：0.7）

64、已知 P{ξ=k}=a$(3/4)^{k-1}$ (k=1,2,...)，若这是有效分布律，则 a=______。（答案：1/4）

65、设 P{η=x}=0.2 (x=-1,0,1,2,3)，则 E($η^2$)=______。（答案：3）

66、连续型随机变量 X 的概率密度函数 f(x)必须满足的非负性条件是______。（答案：f(x) ≥ 0）

67、若 f(x)是连续型随机变量的概率密度函数，则其规范性条件可表示为______。（答案：$\int_{-\infty}^{+\infty}$ f(x)dx = 1）

68、连续型随机变量 X 落在区间[a,b]内的概率 P(a≤X≤b)可通过______计算。（答案：$\int_a^b$ f(x)dx）

69、若 F(x)是连续型随机变量的分布函数，则其与概率密度函数 f(x)的关系是______。（答案：F'(x) = f(x)）

70、连续型随机变量的概率密度函数 f(x)在单点处的概率值总是______。（答案：0）

71、设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 f(x)，则 f(x)必须满足的两个基本性质是：(1) ________；(2) ________。（答案：(1) f(x)≥0（非负性）(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}$ f(x)dx = 1（规范性））

72、若 F(x)是连续型随机变量 X 的分布函数，则 F(x)与概率密度函数 f(x)的关系式为：F(x)=________。（答案：$\int_{-\infty}^{x}$ f(t)dt）

73、若 X 的概率密度函数 f(x)为偶函数，则其期望 E(X)=________（假设积分收敛）。（答案：0）

74、对于连续型随机变量 X，若存在数学期望 E(X)，则其定义为：E(X)=________。（答案：$\int_{-\infty}^{+\infty}$ xf(x)dx）

75、若 X 服从正态分布 N(μ,σ²)，则其数学期望 E(X)的值为______。（答案：μ）

76、若 X 服从标准正态分布 N(0,1)，则其概率密度函数在 x=0 处的值为______。（答案：$1/\sqrt{2\pi}$ 或 ≈0.399）

77、正态分布 N(μ,σ²)的方差 D(X)的表达式为______。（答案：σ²）

78、若 X~N(μ,σ²)，则随机变量 Y=(X-μ)/σ 服从的分布是______。（答案：标准正态分布/N(0,1)）

79、正态分布曲线的对称轴为直线______。（答案：x=μ）

80、若 X~N(3,4)，则 P(X≤3)的值为______。（答案：0.5）

81、设随机变量 X 服从参数λ=3 的泊松分布，则 $E(X^2)$的值为______。（答案：12）

82、若随机变量 Y~N(μ=2,σ²=9)，则 P(Y>5)=______。（保留 4 位小数，Φ(1)=0.8413）（答案：0.1587）

83、设 X 服从 B(n=8,p=0.3)的二项分布，则 E(2X-1)的值为______。（答案：3.8）

84、连续型随机变量 Z 的概率密度为 f(z)=2z (0<z<1)，则 D(Z)=______。（答案：1/18）

85、若 X~U(a=1,b=5)的均匀分布，则 P(2<X<4)=______。（答案：0.5）

86、设 X_1，X_2 是来自总体 N(μ ,4) 的简单随机样本，统计量 T=$\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}$ 的分布是______。（答案：T~N($\sqrt{2}$ μ ,4)）

87、若 X_1，X_2，X_3 独立同分布于 N(0,9)，则统计量 T=$\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$ 的方差为______。（答案：3）

88、设 X_1,⋯,X_{10} 来自 N(μ , σ ²)，样本均值 $\overline{X}$ ~ ______（写出分布类型及参数）。（答案：$\overline{X} \sim N$（$\mu,\frac{\sigma^2}{10}$））

89、若 X~N(0,1)，Y=2X+1 的分布为______。（答案：Y~N(1,4)）

90、设 X_1,X_2 独立且均服从 N(0,1)，则 T= $X_1^2+X_2^2$ 服从______分布。答案：自由度为 2 的卡方分布（$\chi^2(2)$）

91、设总体 X~N(μ , σ ²)，其中 σ ² 已知。从总体中抽取容量为 n 的样本，其样本均值为 $\overline{X}$。则 μ 的置信水平为 1− α 的置信区间为________________。（答案：$[\overline{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$）

92、若总体方差 σ ² 未知，采用样本标准差 S 估计时，总体均值 μ 的置信区间需使用__________分布。（答案：t 分布（或学生氏分布））

93、矩估计法的核心思想是用样本矩替代__________矩来估计参数。

（答案：总体）

94、极大似然估计中，似然函数 L(θ) 是样本观测值的__________函数。（答案：联合概率密度）

95、若估计量 $\hat{\theta}$ 满足 E($\hat{\theta}$)= θ ，则称 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的__________估计。（答案：无偏）

96、填空题：在无偏估计量中，方差越小的估计量越______。（答案：有效）

97、样本的函数且不含未知参数的随机变量称为______。（答案：统计量）

98、用样本均值估计总体均值时，样本均值是总体均值的______估计量。（答案：无偏）

99、评价估计量优劣的两个重要标准是______和有效性。（答案：无偏性）

100、设随机变量 X~ χ^2(n)，则 X 的数学期望 E(X)= ______。（答案：n）

二、单项选择题

1、从装有 2 只红球，2 只白球的袋中任取两球，记 A ="取到 2 只白球"，则 $\overline{A}$ =(　D　)。

A. 取到 2 只红球　　B. 取到 1 只白球

C. 没有取到白球　　D.至少取到 1 只红球

2、对掷一枚硬币的试验, "出现正面"称为(　A　)。

A.随机事件　　B. 必然事件　C. 不可能事件　　D. 样本空间

3、对于任意两个相互独立的事件 A 和 B，以下哪个等式成立？(　B　)

A. $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$　　B. $P(AB) = P(A)P(B)$

C. $P(A|B) = P(B|A)$　　D. $P(A) + P(B) = 1$

4、若事件 A 与事件 B 互斥，则下列哪个等式必然成立？　(　B　)

A. $P(AB) = P(A)P(B)$　　B. $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$

C. $P(A|B) = P(A)$　　D. $P(B|A) = 0$

5、设事件 A 与事件 B 独立，且 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.4$，则 $P(AB)$的值为：(　A　)

A. 0.12　　B. 0.7　　C. 0.1　　D. 0.5

6、以下关于事件独立性的描述中，错误的是：　(　C　)

A. 独立事件的概率乘法公式为 $P(AB)=P(A)P(B)$

B. 若 A 与 B 独立，则 A 与 B 的补事件也独立

C. 互斥事件一定是独立事件

D. 独立事件的定义不依赖条件概率

7、已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，且 $P(AB)=0.3$，则事件 A 与 B 的关系是：(　A　)

A. 独立但不互斥　　B. 互斥但不独立

C. 既独立又互斥　　D. 既不独立也不互斥

8、若 $P(A|B)=P(A)$，则事件 A 与事件 B 的关系是：　(　B　)

A. 互斥　　B. 独立　　C. 对立　　D. 包含

9、下列条件中，不能推出事件 A 与 B 独立的是：　(　D　)

A. $P(AB)=P(A)P(B)$　　B. $P(A|B)=P(A)$

C. P(B|A)=P(B)　　　　　D. P(A∪B)=P(A)+P(B)

10、若 A、B 为独立事件，且 P(A)=0.2，P(B)=0.5，则 P(A∪B)等于：(　A　)

A. 0.6　　　B. 0.7　　　C. 0.1　　　D. 0.3

11、关于概率的乘法公式，以下说法正确的是：　(　B　)

A. 对任意事件 A、B 均成立 P(AB)=P(A)P(B)

B. 仅当 A、B 独立时成立 P(AB)=P(A)P(B)

C. 仅当 A、B 互斥时成立 P(AB)=P(A)P(B)

D. 乘法公式与事件性质无关

12、设 P(A)>0，P(B)>0，若事件 A 与 B 既独立又互斥，则必有：(　D　)

A. P(A)=0 或 P(B)=0　　　B. P(A)+P(B)=1

C. P(AB)=P(A)+P(B)　　　D. 该情况不可能存在

13、设 A、B 是样本空间Ω中的随机事件，则(A∩B)∪A 的简化结果为：　(　A　)

A. A　　　B.B　　　C. A∩B　　　D. Ω

14、若 A、B 为互斥事件（A∩B=∅），则(A∪B)-A 等于：(　A　)

A. B　　　B. A　　　C.∅　　　D. A∪B

15、对于任意随机事件 A 和 B，表达式(A∪B)∩A'（A'表示 A 的补集）等于：　(　A　)

A. B-A　　　B. A∩B　　　C. A∪B　　　D. ∅

16、若 A⊆B，则(A∪B)-B 的运算结果为：(　C　)

A. A　　　B. B　　　C. ∅　　　D. A∩B

17、设 A、B 独立且 P(A)=0.4，P(B)=0.3，则 P(A∪B)的值为：　(　A　)

A.0.58　　B. 0.12　　C. 0.70　　D. 0.82

18、设事件 A 与 B 满足 P(A∩B) = P(A)P(B)，则说明：(　B　)

A.事件 A 与 B 互斥　　B. 事件 A 与 B 相互独立

C. 事件 A 是 B 的子集　　D. P(A|B) = 0

19、已知 P(A|B)=0.6 且 P(A)=0.6，则事件 A 与 B 的关系是：(　A　)

A. 相互独立　　B. 互斥　　C. A 包含 B　　D.无法确定

20、若事件 A 与 B 独立，且 P(B|A)=0.5，P(B)=0.5，则 P(A)的值为：(　C　)

A. 必须为 1　　B. 必须为 0.5

C. 可以是任意值（0≤P(A)≤1）　　D. 无法计算

21、设 P(A)>0 且 P(B)>0，若 A 与 B 互斥，则：　(　B　)

A. A 与 B 必然独立　　B. A 与 B 必然不独立

C. 独立性无法判断　　D. P(A∪B)=P(A)+P(B)

22、若随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，则以下哪项正确？

(　B　)

A. E(X) = λ，　D(X) = λ^2　　B.　E(X) = λ, D(X) = λ

C. E(X) = λ^2，　D(X) = λ　　D. E(X) = λ, D(X) = 0

23、设 X 服从泊松分布，已知 E(X) = 3 ，则 D(X) 的值为：　(　B　)

A. 1　　B. 3　　C. 9　　D. 6

24、关于泊松分布的性质，以下说法错误的是：　(　D　)

A. 期望和方差相等

B. 适用于描述稀有事件发生的概率

C. 其概率质量函数为　P(X=k) = $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

D. 方差恒为 1

25、若某随机变量 X 满足 $E(X) = D(X) = 5$，则 X 最可能服从：(B)

A. 二项分布 B. 泊松分布 C. 正态分布 D. 均匀分布

26、设 $X \sim P(\lambda)$，若 $P(X=1) = P(X=2)$ ，则λ的值为： (B)

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

27、假设检验的基本思想依据是：(C)

A. 大数定律 B. 中心极限定理

C. 小概率事件原理 D. 贝叶斯定理

28、在假设检验中，若原假设为真但被错误拒绝，这种错误称为：(A)

A. 第一类错误 B. 第二类错误

C. 检验效能不足 D. 显著性水平过高

29、假设检验中，显著性水平α通常设置为：(A)

A. 0.01 或 0.05 B. 0.5 或 1.0

C. 0.1 或 0.2 D. 由研究者任意指定

30、假设检验的步骤中，不包括：(C)

A. 建立原假设和备择假设 B. 计算检验统计量

C. 直接接受备择假设 D. 根据 p 值或临界值作出决策

31、从装有 4 红球 3 蓝球的袋中任取两球，"至少取到 1 个红球"这一事件属于：(B)

A. 不可能事件 B. 随机事件

C. 必然事件 D. 基本事件

32、袋中有 5 白球 2 黑球，任取 3 球。"全部取到白球"的概率范围是：(B)

A. 等于 0　　B. 介于 0 到 0.5 之间

C. 大于 0.5　　D. 等于 1

33、关于"从 6 正品 2 次品中任取 1 件，抽到次品"的事件性质，正确的是：(D)

A. 概率为 1　　B. 属于复合事件

C. 样本点总数为 2　　D. 概率小于 0.3

34、若袋中仅有 3 个黄球，任取 2 个。"取到黄球"的事件是：(A)

A. 必然事件　　B. 互斥事件

C. 对立事件　　D. 不可能事件

35、从 10 合格 4 不合格产品中随机抽取："恰好 2 合格"的概率特性是：(A)

A. 使用古典概型计算　　B. 概率值为 1

C. 需用几何概型　　D. 属于不可能事件

36、设离散型随机变量 Y 的分布律为 P{Y=k}=1/4 (k=1,2,3,4)，则该分布的性质是：(B)

A. 不是有效的概率分布　　B.是有效的概率分布

C. 需进一步验证　　D. 无法判断

37、若离散型随机变量 Z 的分布律满足 P{Z=k}=1/5 (k=0,1,2,3,4)，则下列说法正确的是：(B)

A.该分布无效，因概率总和小于 1　B. 该分布有效，因概率总和为 1

C. 需补充 P{Z=5}的值才能确定　　　D. 仅当 k 为奇数时分布有效

38、已知离散型随机变量 W 的分布律为 P{W=k}=c（k=1,2,3），若其为有效概率分布，则常数 c 的值为：(　B　)

A.1/2　　　B. 1/3　　　C. 1/4　　　D. 1/6

39、下列哪项是离散型概率分布的有效条件？(　C　)

A. 每个概率值均为负数　　　B. 所有概率值之和大于 1

C. 所有概率值之和等于 1　　　D. 仅需部分概率值已知

40、若随机变量 V 的分布律为 P{V=k}=a (k=2,4,6)，且分布有效，则 a 的取值应为：(　B　)

A. 1/6　　　B.1/3　　　C.1/2　　　D. 1

41、关于连续型随机变量的概率密度函数 f(x)，以下说法正确的是：(　B　)

A. f(x)在定义域内取值必须小于 1

B. f(x)在定义域内可以大于 1，但积分总为 1

C. f(x)在任意区间上的积分表示概率值

D. f(x)在单点的取值直接等于该点概率

42、设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 f(x)，则 P(X=a)的值为：(　B　)

A. f(a)　　　B. 0　　　C. 1　　　D. 由 f(a)的取值决定

43、若 f(x)=2x（0≤x≤1），则 f(0.8)的值为：(　B　)

A. 0.8　　　B. 1.6　　　C. 0.64　　　D. 超过 1 且合法

44、概率密度函数 f(x)必须满足的条件是：(　B　)

A. ∀x,f(x)≤1　　　　　B. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

C. f(x)在定义域内连续　　　D. f(x)为非负单调函数

45、下列函数中，可作为概率密度函数的是：(　B　)

A. $f(x)=-x^2$（−1≤x≤1）　　　B. f(x)=0.5（0≤x≤2）

C. f(x)=x+1（−1≤x≤0）　　　D. f(x)=2（x≥0）

46、任何随机变量的分布函数都满足：(　B　)

A. 单调递减　　　　　B. 右连续

C. 取值范围为(-∞,0)　　　D. 在无穷远处趋于随机变量取值

47、关于离散型随机变量的分布律，以下正确的是：(　A　)

A. 所有取值概率之和为 1　　　B. 取值可以是任意无理数

C. 分布函数一定不连续　　　D. 方差恒小于期望

48、若 X 服从正态分布 N(μ,σ²)，则其概率密度函数：(　B　)

A. 在 x=μ 处取得最小值　　　B. 关于 x=μ 对称

C. 定义域为[0,+∞)　　　D. 与σ无关

49、下列哪个是泊松分布的典型应用场景？(　B　)

A. 连续型测量误差　　　B. 单位时间内稀有事件发生次数

C. 服从均匀分布的随机数　　D. 线性回归残差

50、对于联合分布函数 F(x,y)，必有：(　D　)

A. F(+∞,+∞)=0　　　B. 对每个变量单调递减

C. F(-∞,y)=1　　　D. 关于每个变量右连续

51、在概率论中，关于样本空间的定义，以下哪项是正确的？(　C　)

A. 样本空间是随机试验部分可能结果的集合

B. 样本空间是随机试验所有不可能结果的集合

C. 样本空间是随机试验所有可能结果的集合

D. 样本空间是随机试验的某个特定结果

52、下列哪一项最准确地描述了样本空间的性质？(　C　)

A. 样本空间仅包含我们感兴趣的结果

B. 样本空间必须是有限集合

C. 样本空间包含随机试验中所有互斥且完备的结果

D. 样本空间由研究者主观决定

53、若随机试验为“掷一枚骰子”，其样本空间是：(　B　)

A. {1, 2, 3}　　B. {1, 2, 3, 4, 5, 6}　　C. {奇数, 偶数}　　D. {0, 1}

54、关于样本空间与事件的关系，正确的是：(　C　)

A. 事件是样本空间的真子集

B. 事件可以包含不属于样本空间的元素

C. 事件是样本空间的子集（包括空集和全集）

D. 事件与样本空间无直接联系

55、“某班级学生的身高测量”这一随机试验的样本空间是：(　C　)

A.{高, 矮}　　B.所有可能的实数值

C. [0, 3 米]区间内的实数值　　D. 由测量仪器精度决定的离散值集合

56、若随机变量 X 服从参数为λ的指数分布，其概率密度函数为：

(　A　)

A. $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$（$x\geqslant 0$）　　B. $f(x)=\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}$（$x\geqslant 0$）

C. $f(x)=\lambda xe^{-\lambda x}$（$x\geqslant 0$）　　D. $f(x)=e^{-\lambda x}$（$x\geqslant 0$）

57、设随机变量 X 服从参数为λ的指数分布，则 X 的期望 E(X)为：

(　B　)

A. λ　　B. 1/λ　　C. $λ^2$　　D. 1/$λ^2$

58、关于指数分布的无记忆性，以下描述正确的是：(　A　)

A. P(X>s+t｜X>s)=P(X>t)　　B. P(X>s+t｜X>s)=P(X>s)

C. P(X>s+t｜X>s)=P(X>s+t)　　D. 指数分布不具有无记忆性

59、若随机变量 X 服从参数为λ=2 的指数分布，则 P(X ≤ 1)的值为：

(　B　)

A. $1-e^{-1}$　　B. $1-e^{-2}$　　C. e^{-1}　　D. e^{-2}

60、指数分布通常用于描述以下哪种场景？(　B　)

A. 离散事件发生的间隔时间　　B. 连续事件发生的间隔时间

C. 事件发生的次数　　D. 事件发生的概率

61、X 与 Y 与相互独立，且 D(X)=6，D(Y)=3，则 D(2X-3Y)为(　A　)

A.51　　B.21　　C.﹣3　　D.36

62、设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 D(X)=4，D(Y)=2，则 D(3X-2Y)的值为（　A　).

A. 44　　B. 40　　C. 36　　D. 32

63、若随机变量 X、Y 独立，且 D(X)=5，D(Y)=1，则 D(4X-Y)的值为(　A　).

A. 81　　B. 84　　C. 79　　D. 76

64、已知 X 与 Y 独立，D(X)=3，D(Y)=6，则 D(X+2Y)的值为（　A　).

A. 27　　B. 24　　C. 30　　D. 21

65、设随机变量 X、Y 满足独立性，且 D(X)=2，D(Y)=8，则 D(X-0.5Y)

的值为 (B).

A. 6 B. 4 C. 10 D. 8

66、设随机变量 X 服从标准正态分布 N(0,1)，则 D(X)的值为：(B)

A.0 B. 1 C. 2 D. 0.5

67、若 X~N(0,1)，则 P(X ≤ 0)的值为：(C)

A. 0 B. 0.25 C. 0.5 D. 1

68、设 Z~N(0,1)，则 E(Z^3)等于：(B)

A.1 B. 0 C. 2 D. 3

69、若 Y=2X+3，其中 X~N(0,1)，则 Y 服从的分布是：(C)

A. N(0,1) B.N(3,2) C. N(3,4) D. N(2,3)

70、设 X 服从 B(100,0.01)，则 EX= (A).

A. 1 B. 0.99 C. 0.01 D. 0.9

71、设随机变量 X 服从标准正态分布 N(0,1)，则 E(X^3)的值为 (A).

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

72、若随机变量Y服从参数为 λ=2 的泊松分布，则 E(Y^2) 等于(C)。

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

73、设 Z ~ N(0,1)，则 P(Z ≤ 1.96) 的近似值为(C)。

A. 0.90 B. 0.95 C. 0.975 D. 0.99

74、若 X 和 Y 独立且均服从 N(0,1)，则 E(XY)的值为(A)。

A. 0 B. 1 C. 2 D. -1

75、设随机变量 X 服从二项分布 B(n=10, p=0.5)，则 D(X)的值为(B)。

A. 1.25 B. 2.5 C. 5 D. 10

76、设 X_1 ,X_2 是来自总体 N(μ,1)的简单随机样本，统计量 T= $\frac{X_1+X_2}{2}$ 的分布是？(B)

A. N(μ,1)　B. N(μ,1/2)　C. N(μ,1/ $\sqrt{2}$)　D. N(2 μ,1)

77、设 X_1 ,X_2 是来自总体 N(μ,1)的简单随机样本，统计量 T=X_1+X_2 的分布是？(D)

A. N(μ,1)　B. N(μ,1/2)　C. N(μ,1/ $\sqrt{2}$)　D. N(2 μ,2)

78、设 X_1 ,X_2 是来自总体 N(μ,1)的简单随机样本，统计量 T=X_1-X_2 的分布是？(A)

A. N(0,2)　B. N(μ,1/2)　C. N(μ,1/ $\sqrt{2}$)　D. N(2 μ,2)

79、设 X_1 ,X_2 是来自总体 N(μ,1)的简单随机样本，统计量 T=$\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}$ 的分布是？(C)

A. N(0,2)　B. N(μ,1/2)　C. N(0,1)　D. N(2 μ,2)

80、设 X_1 ,X_2 是来自总体 N(μ,1)的简单随机样本，统计量 $(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}})^2$ 的分布是？(B)

A. N(0,2)　B. $\chi^2(1)$　C. N(0,1)　D. $\chi^2(2)$

81、设 X_1 ,X_2 ,...,X_n 是来自总体 N(μ, σ^2)的简单随机样本，样本均值 $\overline{X}$ 的方差为？(B)

A. σ^2　B. σ^2/n　C. $\sigma/\sqrt{n}$　D. n σ^2

82、若 X 服从 N(0,1)，Y 服从 N(1,1)，且 X 与 Y 独立，则 X+Y 的分布是？(C)

A. N(0,1)　B. N(1,1)　C. N(1,2)　D. N(2,1)

83、设 X_1 ,X_2 是来自总体 N(μ,4)的样本，统计量 $T=X_1-X_2$ 的期望和方差分别为？(A)

A. 0, 8　　B. 0, 4　　C. μ, 8　　D. μ, 4

84、若 X_1 ,X_2 ,...,X_n 独立同分布于 N(μ, σ²)，则 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从的分布是？(B)

A. $\sigma^2\chi^2(n)$　　B. $\sigma^2\chi^2(n-1)$　　C. $\chi^2(n)$　　D. $\chi^2(n-1)$

85、若随机变量 Y 的分布函数 G(y)满足 G(2)=0.45，则下列结论正确的是：(B)

A. P(Y>2)=0.45　　B. P(Y≤2)=0.45

C. P(Y=2)=0.45　　D. P(Y≥2)=0.45

86、已知随机变量 Z 的分布函数 H(z)满足 H(0)=0.25，则 P(Z≤0)的值为：(B)

A. 0.75　　B. 0.25　　C. 0.5　　D. 不可确定

87、设随机变量 W 的分布函数 F(w)在 w=3 处连续且 F(3)=0.6，则 P(W>3)等于：(B)

A. 0.6　　B. 0.4　　C. 1　　D. 0

88、若 P(X≤5)=0.8 且 P(X≤3)=0.4，则 P(3<X≤5)的值为：(A)

A. 0.4　　B. 0.5　　C. 1.2　　D. 0.8

89、关于分布函数 F(x)的性质，下列说法错误的是：(C)

A. F(x)是单调不减函数　　B.F(-∞)=0

C. F(x)处处连续　　D. F(+∞)=1

90、 设总体X 的概率分布率为:$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta & \theta/2 & 1-3\theta/2 \end{pmatrix}$, 其中$\theta>0$ 未知

现得到样本观测值：2，3，2，1，3. 则θ 的矩估计值是(C).

A.2.2 B. 0.23 C. 0.32 D. 2.3

91、设随机变量 X~N(2,9)，则 P{X<2} 的值为(C).

A. 0.1 B. 0.3 C. 0.5 D. 0.7

92、若 Y~N(0,1)，则 P{Y<0} 等于(C).

A. 0 B. 0.25 C. 0.5 D. 1

93、已知 Z~N(−1,4)，P{Z<−1} 的概率是(C).

A. 0.2 B. 0.4 C. 0.5 D. 0.6

94、设 W~N(3,16)，则 P{W≤3}的值为(B).

A. 0.25 B. 0.5 C. 0.75 D. 1

95、若 X~N(μ,σ²)，则 P{X<μ} 必然满足(B).

A. 小于 0.3 B. 等于 0.5 C. 大于 0.7 D. 与参数无关

96、设随机变量 X 服从均匀分布 U(1,5)，则 P{X≤3}的值为：(B).

A. 0.25 B. 0.5 C.0.75 D.1.0

97、若 Y~U(0,10)，则 P{2<Y≤8}等于：(C).

A. 0.2 B.0.4 C. 0.6 D. 0.8

98、对于均匀分布 U(a,b)的随机变量 Z，其概率密度函数 f(z)在区间[a,b]内的取值为：(A).

A. 1/(b-a) B. 1 C. (a+b)/2 D. b-a

99、下列哪组样本的离散程度最小： (B).

A. {1,2,3,4,5} B. {2,3,3,4} C. {10,20,30} D. {5,10,15,20}

100、比较样本{3,6,9,12}和{5,6,7,8}的离散程度：(　C).

A. 第一组样本的方差更小　　　B.第二组样本的标准差更大

C. 第二组样本更集中　　　　　D. 两组样本离散程度相同

三、判断题（共 100 题，每小题 3 分。正确打“ √ ”，错误打“×”）

1、对任意事件 A 和 B，必有 $P(AB)=P(A)P(B)$。　(×)

2、设 A、B 是Ω中的随机事件,则 $(A\cup B)-B=A$。　(×)

3、若 X 服从参数为λ的泊松分布，则 $EX=DX$。　(√)

4、 假设检验基本思想的依据是小概率事件原理。　(√)

5、若事件 A 与 B 互斥，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。　(√)

6、对于任意两个事件 A 和 B，总有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$。　(×)

7、若 $P(A|B)=P(A)$，则事件 A 与 B 相互独立。　(√)

8、不可能事件的概率为 0，但概率为 0 的事件不一定是不可能事件。(√)

9、若 $A\subseteq B$，则 $P(A)\leq P(B)$。　(√)

10、事件"从装有 3 黑球 2 白球的袋中任取两球，至少取到 1 个黑球"是必然事件。　(×)

11、在掷骰子试验中，"出现奇数点"和"出现偶数点"互为对立事件。(√)

12、若 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.4$，则事件 A 与 B 的和事件概率 $P(A\cup B)$必定等于 0.7。 (×)

13、从 52 张扑克牌中随机抽取 1 张，"抽到方片"与"抽到 K"是互斥事

件。 (×)

14、若某实验样本空间包含有限个等可能结果，则每个基本事件的概率都是 1/n。 (√)

15、"明天下雨"是一个随机事件。 (√)

16、"太阳从西边升起"属于必然事件。(×)

17、样本空间是随机试验所有可能结果的集合。 (√)

18、"掷骰子出现奇数点"是复合事件而非基本事件。 (√)

19、若离散型随机变量 X 的分布律满足 P{X=k}=1/6 (k=1,2,3,4,5,6)，则该分布是有效的概率分布。 (√)

20、连续型随机变量的概率密度函数在某点的取值可以大于 1。 (√)

21、任何随机变量的分布函数$F(x)$都满足$\lim_{x\to-\infty} F(x)=1$。 (×)

22、对于离散型随机变量，概率分布函数的图像一定是阶梯型递增的。 (√)

23、若随机变量 X 服从参数为λ的指数分布，则 EX=1/λ且 DX=1/λ^2。 (√)

24、二项分布 B(n,p)的期望和方差相等当且仅当 p=0.5。(×)

25、若 X 服从标准正态分布 N(0,1)，则 E(X^2)=D(X)。(√)

26、均匀分布 U(a,b)的方差与期望无关。(×)

27、泊松分布 P(λ)的期望值λ必须为正整数。(×)

28、若随机变量 X 的方差 DX=0，则 X 几乎必然为常数。(√)

29、若随机变量 X 服从参数λ=1 的指数分布，则 E(X)=1。(√)

30、对于泊松分布 P(λ)，其方差与期望值相等。(√)

31、若 X~N(0,1)，则 $E(X^2)=1$。(√)

32、均匀分布 U(a,b)的期望值是(a+b)/3。(×)

33、二项分布 B(n,p)的方差计算公式是 np(1-p)。(√)

34、设随机变量 X 服从 N(0,1)，则 P{X<0}=0.5。(√)

35、若随机变量 Y~N(2,9)，则 P{Y≤2}=0.5。(√)

36、对于任意正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，P{X≤μ}的值均为 0.5。(√)

37、设 X~N(1,4)，则 P{X<1}=0.3。(×)

38、若 Z~N(0,1)，则 P{Z>1.96}=0.025。(√)

39、对任意随机变量 X，若 E(X)=0，则必有 P{X<0}=0.5。(×)

40、设 X 服从泊松分布 P(λ)，则 P{X<0}=0。(√)

41、均匀分布 U(a,b)的随机变量 Y 满足 P{Y≤(a+b)/2}=0.5。(√)

42、设 X~N(0,1)，则 E(3X+5)=5。(√)

43、若 Y~N(2,4)，则 D(Y)=2。(×)

44、对于任意随机变量 X，$E(X^2)=[E(X)]^2$恒成立。(×)

45、设 Z=2X-3Y，其中 X 与 Y 独立，则 D(Z)=4D(X)+9D(Y)。(√)

46、设 X1,X2 是来自总体 N(μ,1)的简单随机样本，统计量 $\hat{\mu}=\frac{X_1+X_2}{2}$ 是μ的无偏估计。(√)

47、样本方差 $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是总体方差 σ^2 的无偏估计量。(×)

48、极大似然估计量一定是无偏估计量。(×)

49、对于泊松分布 P(λ)，样本均值 $\overline{X}$ 是λ的矩估计量。(√)

50、若$\hat{\theta}$是参数θ的无偏估计量，则$(\hat{\theta})^2$一定是θ^2的无偏估计量。(×)

51、设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，样本均值$\overline{X}$是一个统计量。(√)

52、统计量必须包含总体分布的未知参数。(×)

53、若 $T=X_1+\theta$（θ为未知参数），则 T 是统计量。(×)

54、若随机变量 X 与 Y 相互独立且都服从标准正态分布，则 $X^2 + Y^2$ 服从自由度为 2 的卡方分布。(√)

55、两个独立的标准正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布。(√)

56、若 $X\sim N(0,1)$，则 $E(X^2) = 0$。(×)

57、卡方分布的概率密度函数在定义域内始终单调递增。(×)

58、概率论与数理统计是研究确定性现象的数学学科。(×)

59、数理统计主要通过样本数据推断总体规律。(√)

60、概率论的核心内容是研究事件发生的确定性。(×)

61、随机现象的单个结果可能不确定，但大量重复时呈现规律性。(√)

62、概率论与数理统计属于纯理论数学，无实际应用价值。(×)

63、条件概率是概率论中描述事件间独立性的重要概念。(√)

64、样本方差越大，说明数据分布越分散。(√)

65、若两个样本的均值相同，则它们的离散程度一定相同。(×)

66、样本{2,4,6,8,10}比样本{1,5,6,7,11}更密集。(√)

67、标准差为 0 的样本中，所有数据值相同。(√)

68、点估计是用样本统计量的某个取值直接作为总体参数的估计值。(√)

69、最大似然估计法需要已知总体分布的具体形式。(√)

70、矩估计法要求样本容量必须大于 30 才能使用。(×)

71、置信区间的宽度与置信水平呈正相关。(√)

72、在点估计中，样本均值是总体期望的无偏估计量。(√)

73、矩估计法不需要知道总体分布的具体形式。(√)

74、若 X 与 Y 相互独立，则 $D(X-Y) = D(X) + D(Y)$。(√)

75、若 $D(X)=0$，则 X 必定是零常数的随机变量。(×)

76、对任意常数 a，有 $E(aX) = aE(X)$成立。(√)

77、将一枚硬币连续抛掷 3 次，恰好出现 2 次正面的概率是 3/8。(√)

78、掷一枚均匀骰子，出现奇数点的概率与出现质数点的概率相同。(√)

79、袋中有 3 红球 2 白球，每次取 1 球不放回，连续两次都取到红球的概率是 9/25。(×)

80、若 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，则 $P(A\cap B)$最大可能值为 0.3。(√)

81、置信区间的置信水平表示参数落在该区间内的概率。(×)

82、当样本容量固定时，置信水平越高，置信区间宽度越宽。(√)

83、t 分布适用于总体方差已知时的均值区间估计。(×)

84、95%置信区间比 90%置信区间精度更高。(×)

85、在正态总体中，样本均值的置信区间只与样本容量有关。(×)

86、假设检验只能用于参数的检验，不能用于非参数的检验。(×)

87、非参数假设检验不依赖于总体分布的具体形式。(√)

88、参数的假设检验需要知道总体的分布类型。(√)

89、t 检验属于非参数的假设检验方法。(×)

90、在假设检验中，原假设和备择假设是互斥且完备的。(√)

91、卡方检验是一种常见的参数假设检验方法。(×)

92、非参数假设检验通常适用于小样本数据。(√)

93、假设检验的显著性水平α通常取值为 0.01 或 0.05。(√)

94、若随机变量 X 服从参数λ=2 的泊松分布，则 $P(X=0)=e^{-2}$。(√)

95、泊松分布的期望值和方差总是相等的。(√)

96、当 n 很大且 p 很小时，二项分布可以用泊松分布近似。(√)

97、泊松分布适用于描述连续型随机变量的概率分布。(×)

98、若 X~P(λ)，则 $P(X\geq1)=1-e^{-\lambda}$。(√)

99、若随机变量 X 的分布函数 F(x)满足 F(1)=0.3，则 P(X≤1)=0.3。(√)

100、若 F(x)是某随机变量的分布函数，则 F(x)可以大于 1。(×)

四、解答题

1、设 A、B、C 是 Ω 中的随机事件，将下列事件用 A、B、C 表示出来

（1）仅 A 发生，B、C 都不发生；

（2）A,B,C 中至少有两个发生；

（3）A,B,C 中不多于两个发生；

（4）A,B,C 中恰有两个发生；

（5）A,B,C 中至多有一个发生。

答案：　　（1）$A\overline{B}\overline{C}$

（2）$AB \cup AC \cup BC$ 或 $ABC \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$；

（3）$\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ 或 $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

（4）$AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$；

（5）$\overline{A}\overline{B} \cup \overline{A}\overline{C} \cup \overline{B}\overline{C}$ 或 $\overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$

2、 已知离散型随机变量 X 的分布列为

X	-2	-1	0	1	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

求 $Y = X^2$ 的分布列.

答案：　　Y 的分布列为

Y	0	1	4	9
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

3、已知离散型随机变量 X 的分布列为：

X	-1	0	1	2
$P(X)$	0.2	0.3	0.1	0.4

求随机变量 Y=2X+1 的分布列。

答案：

Y	-1	1	3	5
$P(Y)$	0.2	0.3	0.1	0.4

4、设离散型随机变量 X 的分布列为：

X	1	2	3
$P(X)$	0.4	0.5	0.1

求随机变量 $Z=X^2-1$ 的分布列。

答案：

Z	0	3	8
$P(Z)$	0.4	0.5	0.1

5、已知离散型随机变量 X 的分布列为：

X	a	b
$P(X)$	0.6	0.4

且 E(X)=1.4。若定义 W=3X−2，求 W 的分布列及数学期望 E(W)。

答案：由 E(X)=a×0.6+b×0.4=1.4，

W 的分布列为：

W	3a-2	3b-2
$P(W)$	0.6	0.4

E(W)=0.6(3a−2)+0.4(3b−2)

=1.8a+1.2b−2

=3(0.6a+0.4b)−2

=3×1.4−2

=2.2

6、某城市有两个快递公司 A 和 B，A 公司处理全市 60%的快递，B 公司处理 40%。A 公司快递准时送达率为 92%，B 公司为 85%。求该城市快递的总体准时送达率。

答案：使用全概率公式计算：

总体准时送达率 = P(A) × P(准时|A) + P(B) × P(准时|B)

= 60% × 92% + 40% × 85%

= 0.6 × 0.92 + 0.4 × 0.85

= 0.552 + 0.34

= 0.892（即 89.2%）

7、某学校的学生中，男生占 55%，女生占 45%。男生通过英语四级考试的概率为 70%，女生为 82%。求该校学生英语四级的总体通过率。

答案：

总体通过率 = P(男生) × P(通过|男生) + P(女生) × P(通过|女生)

= 55% × 70% + 45% × 82%

= 0.55 × 0.7 + 0.45 × 0.82

= 0.385 + 0.369

= 0.754（即 75.4%）

8、某电商平台有两家供应商 X 和 Y，X 供应 60%的商品，Y 供应 40%。X 供应商的商品好评率为 88%，Y 供应商为 75%。求该平台商品的总体好评率。

答案：

总体好评率 = P(X) × P(好评|X) + P(Y) × P(好评|Y)

= 60% × 88% + 40% × 75%

= 0.6 × 0.88 + 0.4 × 0.75

= 0.528 + 0.3

= 0.828（即 82.8%）

9、从一副不含大小王的扑克牌中任取一张，记事件 C={抽到 K}，事件 D={抽到的牌是黑色的}。

（1）求 P(C)、P(D)和 P(C∩D)；

（2）判断事件 C 与 D 是否相互独立，并说明理由。

答案：（1）P(C) = 4/52 = 1/13（共有 4 张 K）；

P(D) = 26/52 = 1/2（黑色牌共 26 张）；

P(C∩D) = 2/52 = 1/26（黑色 K 有 2 张）。

（2）验证独立性：若 P(C∩D) = P(C)・P(D)，则独立。

计算得 P(C)・P(D) = (1/13)×(1/2) = 1/26 = P(C∩D)，因此事件 C 与 D 相互独立。

10、设 X_1, X_2, ..., X_n 是来自正态总体 N(μ, σ^2)的简单随机样本，样本均值为 $\bar{X}$，样本方差为 S^2。试证明统计量 T = ($\bar{X}$ - μ)/(S/$\sqrt{n}$)服从自由度为 n-1 的 t 分布。

答案：

1. 由定义，$t=\frac{Z}{\sqrt{U/n}}$，其中 $Z\sim N(0,1)$，$U\sim\chi^2(n)$，且 Z 与 U 独立。

2. $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，因此 $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$。

3. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$。

4. $T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=\frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}}=\frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{n-1}}}$。

5. 因此 T 服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布。

11、设 X_1, X_2, ..., X_{10} 来自正态总体 N(0,4)的简单随机样本，定义统计量 $Y=\sqrt{\frac{7}{3}}\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{X_4^2+X_5^2+\cdots+X_{10}^2}}$。求 Y 的分布及其自由度。

答案：

1. $X_1+X_2+X_3\sim N(0,3\times 4)=N(0,12)$。

2. 标准化后：$\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{12}}\sim N(0,1)$。

3. $\frac{X_4^2}{4}+\frac{X_5^2}{4}+\cdots+\frac{X_{10}^2}{4}\sim\chi^2(7)$。

4. $$Y=\sqrt{\frac{7}{3}}\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{X_4^2+X_5^2+\cdots+X_{10}^2}}=\frac{\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{12}}}{\sqrt{\frac{X_4^2+X_5^2+\cdots+X_{10}^2}{28}}}=\frac{\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{12}}}{\sqrt{\frac{\frac{X_4^2}{4}+\frac{X_5^2}{4}+\cdots\frac{X_{10}^2}{4}}{7}}}$$

5. 因此 Y 服从自由度为 7 的 t 分布。

12、设 X_1 ，X_2 ，…，X_n 来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，定义统计量 $Q=\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{S^2}$。求 Q 的分布。

答案：

1. $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

   由此可得 $\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2=\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$

2. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

3. $Q=\frac{\left[\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}/1\right]}{\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)\right]}\sim F(1,n-1)$

12、设随机变量 X 的概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}kx^2, & 0\le x\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求常数 k 的值。

答案：

由概率密度函数的性质 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ 得：

$\int_0^2 kx^2dx = 1$

计算积分：

$k\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = k \cdot \frac{8}{3} = 1$

解得：

$k = \frac{3}{8}$

13、设随机变量 Y 的概率密度函数为：

$$f(y) = \begin{cases} ce^{-3y}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

求常数 c 的值。

答案：

由概率密度函数的归一性：

$\int_0^{\infty} ce^{-3y}dy = 1$

计算积分：

$c\left[-\frac{1}{3}e^{-3y}\right]_0^{\infty} = c \cdot \frac{1}{3} = 1$

解得：

$c = 3$

14、设随机变量 Z 的概率密度函数为：

$$f(z) = \begin{cases} a(1-z^2), & -1 \leq z \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求常数 a 的值。

答案：

根据概率密度函数的性质：

$$\int_{-1}^{1} a(1-z^2)dz = 1$$

计算积分（利用偶函数性质）：

$$2a\int_0^1(1-z^2)dz = 2a\left[z-\frac{z^3}{3}\right]_0^1 = 2a\cdot\frac{2}{3} = 1$$

解得：

$$a = \frac{3}{4}$$

15、某工厂有三条生产线 A、B、C，分别占总产量的 30%、50%、20%。已知 A、B、C 生产线的不合格品率分别为 2%、1%、3%。现从总产品中随机抽取一件，发现是不合格品。求该不合格品来自生产线 A 的概率。（要求：使用贝叶斯公式解答）

答案：设事件：

A：产品来自生产线 A

B：产品来自生产线 B

C：产品来自生产线 C

D：产品为不合格品

已知条件：

P(A) = 30%， P(B) = 50%， P(C) = 20%

P(D|A) = 2%， P(D|B) = 1%， P(D|C) = 3%

计算全概率 P(D)：

P(D)=P(A)P(D｜A)+P(B)P(D｜B)+P(C)P(D｜C)=0.3×0.02+0.5×0.01+0.2×0.03=0.017

应用贝叶斯公式：

P(A|D) =P(A)P(D｜A)/P(D)=0.3×0.02/0.017≈35.29%

16、某疾病在人群中的患病率为 1%。针对该疾病的检测试剂灵敏度

（真阳性率）为 95%，特异度（真阴性率）为 90%。若某人检测结果为阳性，求其实际患病的概率。（要求：使用贝叶斯公式解答）

答案：设事件：

H：患病

¬H：未患病

T+：检测为阳性

已知条件：

$P(H) = 1\%$， $P(\neg H) = 99\%$

$P(T+|H) = 95\%$， $P(T+|\neg H) = 10\%$（假阳性率=1-特异度）

计算全概率 P(T+)：

$P(T+)=P(H)P(T+|H)+P(\neg H)P(T+|\neg H)=0.01\times0.95+0.99\times0.10=0.1085$

应用贝叶斯公式：

$P(H|T+) =P(H)P(T+|H)/P(T+)=0.01\times0.95/0.1085\approx8.76\%$

17、某学校 60%的学生为理科生，40%为文科生。理科生中喜欢数学的比例为 70%，文科生中喜欢数学的比例为 30%。随机询问一名学生，若该生喜欢数学，求其为理科生的概率。（要求：使用贝叶斯公式解答）

答案：

设事件：

S：理科生

¬S：文科生

M：喜欢数学

已知条件：

P(S) = 60%，　P(¬S) = 40%

P(M|S) = 70%，　P(M|¬S) = 30%

计算全概率 P(M)：

P(M)=P(S)P(M｜S)+P(¬S)P(M｜¬S)=0.6×0.7+0.4×0.3=0.54

应用贝叶斯公式：

P(S|M) =P(S)P(M｜S)/P(M)=0.6×0.7/0.54≈77.78%

18、某批产品的不合格率为 5%。采用有放回抽样方式： (1) 连续抽取 100 次，求恰好出现 3 次不合格品的概率；(2) 若要求至少抽到 1 件不合格品的概率≥99%，最少需要抽取多少次？

答案：(1) 设 X 为不合格品数量，X~B(100,0.05)

P(X=3) = $C_{100}^{3} \times 0.05^{3} \times 0.95^{97} \approx 0.1396$

(2) 设需要 n 次：$1 - 0.95^{n} \geqslant 0.99$

解得 $n \geqslant \ln(0.01)/\ln(0.95) \approx 90$

19、甲、乙两射手独立射击同一目标，命中率分别为 0.8 和 0.7： (1) 求两人都命中的概率；(2) 求目标被击中的概率；(3) 若已知目标被击中，求是甲单独命中的概率。

答案：

(1) P(甲∩乙) = 0.8×0.7 = 0.56

(2) P(甲∪乙) = 0.8 + 0.7 - 0.56 = 0.94

(3) P(甲独中|击中) = [0.8×(1-0.7)]/0.94 ≈ 0.2553

20、某系统由 3 个独立工作的元件串联组成，元件寿命服从参数 λ

=0.01/h 的指数分布：（1）求系统寿命超过 100 小时的概率；（2）若改为并联结构，重新计算该概率

解答：

（1）串联时：$P = e^{(-3\times0.01\times100)} = e^{-3} \approx 0.0498$

（2）并联时：$P = 1 - (1 - e^{(-0.01\times100)})^3 \approx 0.9970$

21、设事件 A,B 独立且 P(A)=0.4，P(B)=0.5：（1）求 $P(A\cup B)$；（2）求 $P(A|A\cup B)$；（3）证明 A 与 $A\cup B$ 不独立

答案：

(1) $P(A\cup B) = 0.4 + 0.5 - 0.4\times0.5 = 0.7$

(2) $P(A|A\cup B) = P(A)/P(A\cup B) = 0.4/0.7 \approx 0.5714$

(3) $\because$ $P(A\cap(A\cup B)) = P(A) = 0.4 \neq P(A)\times P(A\cup B) = 0.28$

$\therefore$ 不独立

22、某实验中成功概率 p 未知，进行 n 次独立重复实验：（1）写出似然函数；（2）当观测到 k 次成功时，求 p 的极大似然估计；（3）若 n=100，k=35，计算估计值。

答案：

(1) $L(p) = C(n,k)p^k(1-p)^{n-k}$

（2）对 lnL 求导得：$\hat{p} = k/n$

（3）$\hat{p} = 35/100 = 0.35$

23、设离散型随机变量 X 的概率分布如下表所示：

X	1	2	3
P	0.4	0.3	0.3

求 X 的数学期望 E(X)。

答案：

E(X)=1×0.4+2×0.3+3×0.3=0.4+0.6+0.9=1.9

24、连续型随机变量 X 的概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 X 的数学期望 E(X)。

答案：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2x\,dx=2\int_0^1 x^2\,dx=2\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

25、设随机变量 X 服从参数为λ=2 的泊松分布，求 E(X)。

答案：泊松分布的数学期望为参数λ，因此 E(X)=λ=2。

25、某电子元件寿命 X（单位：小时）服从指数分布，其概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1000}e^{-\frac{x}{1000}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

求 E(X)。

答案：

指数分布的数学期望为参数θ=1000，因此 E(X)=θ=1000 小时。

26、设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布如下：

$X \setminus Y$	**0**	**1**
0	0.2	0.3
1	0.1	0.4

求 E(X)和 E(Y)。

答案：

计算 $E(X)$

先求 X 的分布律：

- $P(X=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)=0.2+0.3=0.5$
- $P(X=1)=P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)=0.1+0.4=0.5$

根据数学期望公式 $E(X)=\sum_i x_iP(X=x_i)$，可得：

$E(X)=0\times 0.5+1\times 0.5=0.5$

计算 $E(Y)$

先求 Y 的分布律:

- $P(Y=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)=0.2+0.1=0.3$
- $P(Y=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)=0.3+0.4=0.7$

根据数学期望公式 $E(Y)=\sum_i y_i P(Y=y_i)$，可得:

$E(Y)=0\times0.3+1\times0.7=0.7$

27、设随机变量 X 的概率分布如下表所示：

X	-1	0	1
P	0.3	0.4	0.3

求：(1) E(X) ；(2) D(X)。

答案：(1) E(X) = (-1)×0.3 + 0×0.4 + 1×0.3 = 0

(2) D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = [$(-1)^2$ ×0.3 + 0^2 ×0.4 + 1^2 ×0.3] - 0 = 0.6

28、已知连续型随机变量 X 的概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 X 的方差 D(X)。

答案：

E(X) = $\int_{-\infty}^{+\infty}$ x·f(x)dx = $\int_0^1$ 2x² dx = 2/3

E(X²) = $\int_{-\infty}^{+\infty}$ x²·f(x)dx = $\int_0^1$ 2x³ dx = 1/2

D(X) = E(X²) - [E(X)]² = 1/2 - (2/3)² = 1/18

29、甲乙两批零件的长度（单位：cm）服从以下分布：

甲：E(X)=10，D(X)=0.1

乙：E(Y)=10.1，D(Y)=0.15

从稳定性角度分析应选择哪批零件？说明计算依据。

答案：

虽然两批零件均值相近，但应选择方差较小的甲批（$0.1 < 0.15$），因为方差越小说明长度波动越小，质量更稳定。计算依据为方差反映数据的离散程度。

30、设随机变量 X~B(n,p)，已知 E(X)=12，D(X)=8，求参数 n 和 p 的值。

答案：

由二项分布性质得方程组：

$$\begin{cases} np = 12 \\ np(1-p) = 8 \end{cases}$$

解得：p = 1/3，n = 36。

31、某班级概率论考试成绩服从正态分布 N(75, σ^2)，若 P(X⩾85)=0.05，求：(1) 标准差σ；(2) 成绩在 65~85 分之间的概率。

答案：

(1) P(X⩾85)=0.05 ⇒ (85-75)/σ=1.645 ⇒ σ≈6.08

(2) P(65<X<85)=Φ(1.645)-Φ(-1.645)=0.90。

32、设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，X_1，X_2，…，X_n 为来自该总体的简单随机样本。

（1）求参数 λ 的矩估计量；

（2）若样本观测值为 1，2，0，1，3，计算 λ 的矩估计值。

答案：

(1) 泊松分布的期望 $E(X) = \lambda$，故矩估计量为样本均值：

$\hat{\lambda} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

(2) 代入数据得：

$\hat{\lambda} = \frac{1+2+0+1+3}{5} = \frac{7}{5} = 1.4$

33、设总体 X 服从均匀分布 U(0, θ)，X_1，X_2，…，X_n 为来自该总体的简单随机样本。

（1）求参数 θ 的矩估计量；

（2）若样本观测值为 1.2，0.8，1.5，1.0，计算 θ 的矩估计值。

答案：

(1) 均匀分布的期望 $E(X) = \frac{\theta}{2}$，由矩估计法得：

$\bar{X} = \frac{\theta}{2} \implies \hat{\theta} = 2\bar{X}$

(2) 代入数据得：

$\hat{\theta} = 2 \times \frac{1.2+0.8+1.5+1.0}{4} = 2 \times 1.125 = 2.25$

34、设总体 X 的密度函数为 f(x; α)= α $x^{\alpha-1}$（0<x<1，α >0），X_1，X_2，…，X_n 为样本。

（1）求参数 α 的矩估计量；

（2）若样本均值为 0.6，求 α 的矩估计值。

答案：

(1) 计算总体期望：

$E(X) = \int_0^1 x \cdot \alpha x^{\alpha-1}\, dx = \alpha \int_0^1 x^{\alpha}\, dx = \frac{\alpha}{\alpha+1}$

由矩估计法 $\bar{X} = \frac{\alpha}{\alpha+1}$，解得：

$\hat{\alpha} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$

(2) 代入 $\bar{X} = 0.6$ 得：

$\hat{\alpha} = \frac{0.6}{1-0.6} = 1.5$

35、设总体 X~N(μ,4)，从中抽取容量为 9 的样本，测得样本均值为 $\overline{X}$=5。

(1) 求 μ 的置信水平为 95%的置信区间；

(2) 若要求区间长度不超过 2，至少需要多大样本容量？

（已知 $z_{0.025}$=1.96）

答案：

(1) 置信区间公式：

$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5 \pm 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{9}} = 5 \pm 1.307$

区间为 $[3.693, 6.307]$。

(2) 由 $2 \times 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 2$，解得 $n \geq 15.37$，故至少需要16。

36、设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，样本观测值为{1,3,2,0,2}。

(1) 用矩估计法求 λ 的估计值；

(2) 用极大似然估计法验证结果是否一致。

答案：

(1) 样本均值 $\bar{x} = \frac{1+3+2+0+2}{5} = 1.6$，因 $E(X) = \lambda$，故矩估计 $\hat{\lambda} = 1.6$。

(2) 似然函数：

$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{5} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}$

对数似然求导得 $\hat{\lambda} = \bar{x} = 1.6$，结果一致。

37、从正态总体 N(μ, σ²) 中抽取样本{10,12,8,11,9}。

(1) 求 σ² 的无偏估计；

(2) 若 σ²=4，求 P($\overline{X}$>11)。

答案：

(1) 样本方差 $s^2=\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2=2.5$，为无偏估计。

(2) $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{4}{5}\right)$，标准化后：
$P\left(Z>\frac{11-10}{\sqrt{0.8}}\right)=P(Z>1.118)\approx 0.1314$

38、设随机变量 X 具有密度函数 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ ，-∞＜ x＜+∞，求 X 的数学期望和方差。

答案：

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0\text{，（因为被积函数为奇函数）}$$

$$DX=EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx$$

$$=-x^2e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$$

$$=2[-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx]=2$$

39、某保险公司多年的资料表明，在索赔户中，被盗索赔户占 20%，以 X 表示在随机抽查 100 个索赔户中因被盗而向保险公司索赔的户数，求 $P(14\le X\le 30)$。

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
Φ(x)	0.500	0.691	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

答案：

X~b(k;100,0.20), EX=100×0.2=20, DX=100×0.2×0.8=16

$$P(14\le X\le 30)\approx\Phi\left(\frac{30-20}{\sqrt{16}}\right)-\Phi\left(\frac{14-20}{\sqrt{16}}\right)$$

$$=\Phi(2.5)-\Phi(-1.5)$$

$$=0.994+0.933--1$$

$$=0.927$$

40、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自几何分布

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1},\ k=1,2,\cdots,\quad 0<p<1\text{，}$$

的样本，试求未知参数 p 的极大似然估计.

答案：

$$L(x_1,\cdots,x_n;p)=\prod_{i=1}^{n}p(1-p)^{x_i-1}=p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}.$$

$$\ln L=n\ln p+(\sum_{i=1}^{n}X_i-n)\ln(1-p),$$

$$\frac{d\ln L}{dp}=\frac{n}{p}-\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n}{1-p}\triangleq 0,$$

解似然方程

$$\frac{n}{p}=\frac{-n+\sum_{i=1}^{n}X_i}{1-p},$$

得 p 的极大似然估计

$$\hat{p}=\frac{1}{\overline{X}}。$$

41、设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\quad \theta>-1.$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，求未知参数 θ 的极大似然估计量。

答案：

似然函数为 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}=(\theta+1)^n(x_1,\cdots,x_n)^{\theta}$

$$\ln L=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\triangleq 0$$

解似然方程得 θ 的极大似然估计为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1.$$

42、设事件 A,B 仅发生一个的概率为 0.3，且 $P(A)+P(B)=0.5$，求 A,B 至少有一个不发生的概率.

答案：$P(A\overline{B}+\overline{A}B)=0.3$

即 $0.3=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)=0.5-2P(AB)$

所以 $P(AB)=0.1$

$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.9$.

43、设随机变量 X 服从泊松分布，且 $P(X\le 1)=4P(X=2)$，求 $P(X=3)$。

答案：$P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}$，$P(X=2)=\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$

由 $P(X\le 1)=4P(X=2)$ 知 $e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}=2\lambda^2 e^{-\lambda}$

即 $2\lambda^2-\lambda-1=0$ 解得 $\lambda=1$，故

$P(X=3)=\frac{1}{6}e^{-1}$.

44、已知一批产品中 90%是合格品，检查时，一个合格品被误认为是次品的概率为 0.05，一个次品被误认为是合格品的概率为 0.02，求（1）一个产品经检查后被认为是合格品的概率；（2）一个经检查后被认为是合格品的产品确是合格品的概率.

答案：设 $A=$ ‘任取一产品，经检验认为是合格品’

$B=$ ‘任取一产品确是合格品’

则（1） $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$

$=0.9\times 0.95+0.1\times 0.02=0.857.$

（2） $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.9\times 0.95}{0.857}=0.9977$

45、从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗，假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的，并且概率都是 2/5. 设 X 为途中遇到红灯的次数，求 X 的分布列、分布函数、数学期望和方差.

答案：X 的概率分布为

$$P(X=k)=C_3^k(\frac{2}{5})^k(\frac{3}{5})^{3-k} \qquad k=0,1,2,3.$$

即

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0\ , & x<0, \\ \frac{27}{125}, & 0\le x<1, \\ \frac{81}{125}, & 1\le x<2, \\ \frac{117}{125}, & 2\le x<3, \\ 1\ , & x\ge 3. \end{cases}$$

$$EX=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5},$$

$$DX=3\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{18}{25}.$$

46、设某机器生产的零件长度（单位：cm）$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，今抽取容量为 16 的样本，测得样本均值$\bar{x}=10$，样本方差$s^2=0.16$.（1）求μ的置信度为 0.95 的置信区间；（2）检验假设$H_0:\sigma^2\le 0.1$（显著性水平为 0.05）.

（附注）$t_{0.05}(16)=1.746,\ t_{0.05}(15)=1.753,\ t_{0.025}(15)=2.132,$

$$\chi^2_{0.05}(16)=26.296,\ \chi^2_{0.05}(15)=24.996,\ \chi^2_{0.025}(15)=27.488.$$

答案：（1）μ的置信度为$1-\alpha$下的置信区间为

$$(\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\quad \bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$$

$$\bar{X}=10,\ s=0.4,\ n=16,\ \alpha=0.05,\ t_{0.025}(15)=2.132$$

所以μ的置信度为 0.95 的置信区间为（9.7868，10.2132）

（2） $H_0:\sigma^2\le 0.1$ 的拒绝域为 $\chi^2\ge\chi^2_\alpha(n-1)$.

$$\chi^2=\frac{15S^2}{0.1}=15\times1.6=24，\quad \chi^2_{0.05}(15)=24.996$$

因为 $\chi^2=24<24.996=\chi^2_{0.05}(15)$ ，所以接受 H_0 .

47、某种产品单个质量的均值是 12g，标准差是 1g. 更新设备后，从所生产的产品中随机取出 100 个，测得样本均值是 $\bar{x}=12.5g$. 设这批产品的重量服从正态分布，问设备更新前后产品的平均重量是否有变化？($\alpha=0.05$)($u_{0.025}=1.96$， $u_{0.05}=1.64$)

答案：

原假设 $H_0:\mu=12$，备择假设 $H_1:\mu\neq12$。

计算检验统计量：$z=\frac{12.5-12}{1/\sqrt{100}}=5$。

已知 $\alpha=0.05$，双侧临界值 $z_{\alpha/2}=1.96$，因 $|z|=5>1.96$，拒绝 H_0。

结论：设备更新前后产品平均重量有变化。

48、设事件 A 与 B 相互独立，事件 B 与 C 互不相容，事件 A 与 C 互不相容，且 $P(A)=P(B)=0.5$， $P(C)=0.2$，求事件 A 、 B 、 C 中仅 C 发生或仅 C 不发生的概率。

答案：

$P(\bar{A}\bar{B}C+AB\bar{C})=P(\bar{A}\bar{B}C)+P(AB\bar{C})$

因为 A 与 C 不相容，B 与 C 不相容，所以 $\bar{A}\supset C,\bar{B}\supset C$，故 $\bar{A}\bar{B}C=C$

同理 $AB\bar{C}=AB$.

$P(\bar{A}\bar{B}C+AB\bar{C})=P(C)+P(AB)=0.2+0.5\times0.5=0.45$.

49、甲盒中有 2 个白球和 3 个黑球，乙盒中有 3 个白球和 2 个黑球，今从每个盒中各取 2 个球，发现它们是同一颜色的，求这颜色是黑色的概率。

答案：设 $A=$ ‘四个球是同一颜色的’，

$B_1=$ ‘四个球都是白球’， $B_2=$ ‘四个球都是黑球’

则 $A=B_1+B_2$.

所求概率为 $P(B_2|A)=\dfrac{P(AB_2)}{P(A)}=\dfrac{P(B_2)}{P(B_1)+P(B_2)}$

$$P(B_1)=\frac{C_2^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{100},\ P(B_2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{3}{100}$$

所以 $P(B_2|A)=\dfrac{1}{2}$.

50、装有 10 件某产品（其中一等品 5 件，二等品 3 件，三等品 2 件）的箱子中丢失一件产品，但不知是几等品，今从箱中任取 2 件产品，结果都是一等品，求丢失的也是一等品的概率。

答案：设 $A=$ ‘从箱中任取 2 件都是一等品’

$B_i=$ ‘丢失 i 等号’　　$i=1,\ 2,\ 3$.

则 $P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{C_4^2}{C_9^2}+\frac{3}{10}\cdot\frac{C_5^2}{C_9^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{C_5^2}{C_9^2}=\frac{2}{9};$$

所求概率为 $P(B_1|A)=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\dfrac{3}{8}$.

51、设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}ax+1, & 0\le x\le 2,\\ 0\ , & \text{其它.}\end{cases}$$

求（1）常数 a；　（2）X 的分布函数 $F(x)$；　（3）$P(1<X<3)$.

答案：（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^2(ax+1)dx=(\frac{a}{2}x^2+x)|_0^2=2a+2$

$\therefore \quad a = -\frac{1}{2}$

（2）X 的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \begin{cases} 0 \quad , & x < 0, \\ \int_{0}^{x}(1-\frac{u}{2})du, & 0 \le x \le 2, \\ 1 \quad , & x > 2. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \quad , & x < 0, \\ x - \frac{x^2}{4}, & 0 \le x \le 2, \\ 1 \quad , & x > 2. \end{cases}$$

（3） $P(1 < x < 3) = \int_{1}^{3} f(x)dx = \int_{1}^{2}(1-\frac{x}{2})dx = \frac{1}{4}$.

52、设总体的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1, \\ 0 \quad , & \text{其它}. \end{cases} \qquad (\theta > 0)$$

试用来自总体的样本$x_1, x_2, \cdots, x_n$，求未知参数θ的矩估计和极大似然估计.

答案：先求矩估计

$$\mu_1 = EX = \int_{0}^{1} \theta x^{\theta} dx = \frac{\theta}{\theta+1}$$

$\therefore \quad \theta = \frac{\mu_1}{1-\mu_1}$ 　　故θ的矩估计为$\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$

再求极大似然估计

$$L(x_1, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n (x_1 \cdots x_n)^{\theta-1}$$

$$\ln L = n \ln \theta + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

$$\frac{d \ln L}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \triangleq 0$$

所以θ的极大似然估计为

$$\hat{\theta} = -\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}.$$

53、设 $P(A)=0.5$, $P(B)=0.6$, $P(B|\bar{A})=0.8$，求 $A,\ B$ 至少发生一个的概率。

答案：$0.8 = P(B|\bar{A}) = \dfrac{P(B\bar{A})}{1-P(A)} = \dfrac{P(B)-P(AB)}{0.5}$ 得 $P(AB)=0.2$

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(AB) = 1.1-0.2 = 0.9 .$$

54、设 X 服从泊松分布，若 $EX^2=6$，则 $P(X>1)$ 为多少？

答案：$X \sim P(\lambda),\ 6 = EX^2 = DX + (EX)^2 = \lambda + \lambda^2$ 　故　$\lambda = 2$.

$$P(X>1) = 1 - P(X\le 1) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$

$$= 1 - e^{-2} - 2e^{-2} = 1 - 3e^{-2}.$$

54、设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}(x+1), & 0<x<2,\\ 0\quad, & 其他.\end{cases}$ 今对 X 进行 8 次独立观测，以 Y 表示观测值大于 1 的观测次数，求 DY。

答案：$Y \sim B(8,p)$，其中 $p = P(X>1) = \int_1^2 \frac{1}{4}(x+1)dx = \frac{5}{8}$

$$DY = 8\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{8} = \frac{15}{8}.$$

55、元件的寿命服从参数为 $\frac{1}{100}$ 的指数分布，由 5 个这种元件串联而组成的系统，能够正常工作 100 小时以上的概率为多少？

答案：设第 i 件元件的寿命为 X_i，则 $X_i \sim E(\frac{1}{100}),\ i=1,2,3,4,5$. 系统的寿命为 Y，所求概率为

$$P(Y>100) = P(X_1>100,\ X_2>100,\cdots,X_5>100)$$

$$= [P(X_1>100)]^5 = [1-1+e^{-1}]^5 = e^{-5}.$$

56、设测量零件的长度产生的误差X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，今随机地测量 16 个零件，得$\sum_{i=1}^{16}X_i=8$，$\sum_{i=1}^{16}X_i^2=34$. 在置信度 0.95 下，求μ的置信区间。

答案：μ的置信度$1-\alpha$下的置信区间为

$$(\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$$

$$\bar{X}=0.5,\ S^2=\frac{1}{15}[\sum_{i=1}^{16}X_i^2-16\bar{X}^2]=2,\ S=1.4142,\ n=16$$

$$t_{0.025}(15)=2.1315.$$

所以μ的置信区间为（$-0.2535,\ 1.2535$）.

57、设考生的外语成绩（百分制）X服从正态分布，平均成绩（即参数μ之值）为 72 分，96 分以上的人占考生总数的 2.3%，今任取 100 个考生的成绩，以Y表示成绩在 60 分至 84 分之间的人数，求（1）Y的分布列.（2）EY和DY.

$(\Phi(2)=0.977,\ \Phi(1)=0.8413)$

答案：（1）$Y\sim B(100,\ p)$，其中$p=P(60<X\le 84)=\Phi(\frac{84-72}{\sigma})$

$$-\Phi(\frac{60-72}{\sigma})=2\Phi(\frac{12}{\sigma})-1$$

由 $0.023=P(X>96)=1-\Phi(\frac{96-72}{\sigma})=1-\Phi(\frac{24}{\sigma})$

得 $\Phi(\frac{24}{\sigma})=0.977$，即$\frac{24}{\sigma}=2$，故$\frac{12}{\sigma}=1$

所以 $p=2\Phi(1)-1=0.6826$.

故Y的分布列为$P(Y=k)=C_{100}^{k}(0.6826)^k(0.3174)^{100-k}$

（2）$EY=100\times 0.6826=68.26$，$DY=68.26\times 0.3174=21.6657$

58、计算：（1）教室里有r个学生，求他们的生日都不相同的概率；

（2）房间里有四个人，求至少两个人的生日在同一个月的概率.

答案： （1）设$A=$‘他们的生日都不相同’，则

$$P(A)=\frac{P_{365}^{r}}{365^{r}}$$

（2）设$B=$‘至少有两个人的生日在同一个月’，则

$$P(B)=\frac{C_4^2C_{12}^1P_{11}^2+C_4^2C_{12}^2+C_4^3P_{12}^2+C_{12}^1}{12^4}=\frac{41}{96};$$

或

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-\frac{P_{12}^4}{12^4}=\frac{41}{96}$$

59、设$P(A)>0,\ P(B)>0$，证明A、B互不相容与A、B相互独立不能同时成立.

答案： 若A、B互不相容，则$AB=\phi$，于是$P(AB)=0\neq P(A)P(B)>0$

所以 A、B不相互独立.

若A、B相互独立，则$P(AB)=P(A)P(B)>0$，于是$AB\neq\phi$，

即A、B不是互不相容的.

60、设(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x\geq 0,\ Y\geq 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

问X,Y是否独立？

答案：边际密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}0, & x<0,\\ \int_0^{+\infty}e^{-x}e^{-y}dy, & x>0;\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0,\\ e^{-x}, & x\geq 0.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ e^{-y}, & y>0.\end{cases}$$

因为 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以$X,Y$独立.

61、设总体X服从指数分布

$$f(x;\theta)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x\ge\theta, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

试利用样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$，求参数θ的极大似然估计.

答案： $L(X_1,\cdots,X_n;\ \theta)=\prod_{i=1}^{n}e^{-(x_i-\theta)}=e^{-\sum_{i=1}^{n}x_i+n\theta},\quad x_i\ \ge\theta,\ i=1,2,\cdots,n.$

$$\ln L=n\theta-\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta}=n\ne 0$$

由极大似然估计的定义，因为似然函数随θ增大而增大，且需满足所有样本 x_i≥θ，所以θ的极大似然估计是样本的最小值。θ的极大似然估计为$\hat{\theta}=x_{(1)}$.

62、一袋中装有m枚正品硬币，n枚次品硬币（次品硬币的两面均印有国徽）从袋中任取一枚，已知将它投掷r次，每次都得到国徽，问这枚硬币是正品的概率是多少？

答案： 设$A=$‘任取一枚硬币掷r次得r个国徽’，

$B=$‘任取一枚硬币是正品’，

则

$A=BA+\bar{B}A$，所求概率为

$$P(B\mid A)=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(B)P(A\mid B)+P(\bar{B})P(A\mid \bar{B})}$$

$$=\frac{\frac{m}{m+n}\left(\frac{1}{2}\right)^r}{\frac{m}{m+n}\left(\frac{1}{2}\right)^r+\frac{n}{m+n}}=\frac{m}{m+n\cdot 2^r}$$

63、某种零件的尺寸标准差为σ=5.2，对一批这类零件检查 9 件得平均尺寸数据（毫米）：$\bar{x}$=26.56，设零件尺寸服从正态分布，问这批零件的平均尺寸能否认为是 26 毫米（$\alpha=0.05$）.正态分布表如下

x	0	1.56	1.96	2.33	3.1
Φ(x)	0.5	0.941	0.975	0.99	0.999

答案：问题是在σ^2已知的条件下检验假设H_0： μ_0=26

查正态分布表，$1-\frac{\alpha}{2}$=0.975， $\mu_{1-\frac{\alpha}{2}}$=1.96

$$|u|=\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=0.323<1.96,$$

应当接受H_0，即这批零件的平均尺寸应认为是 26 毫米。

64、某工厂有甲、乙、丙三个车间，分别生产产品的数量占总产量的 25%、35%、40%，各车间产品的合格率分别为 98%、95%、92%。现从该厂生产的产品中随机抽取一件，求：

（1）该产品是合格品的概率；

（2）若已知抽取的产品是合格品，求它来自乙车间的概率。

答案：

（1）求产品是合格品的概率

设事件 A_1：“产品来自甲车间”，A_2：“产品来自乙车间”，A_3：“产品来自丙车间”，B：“产品是合格品”。

由题意可知：

$P(A_1)=0.25$，$P(A_2)=0.35$，$P(A_3)=0.40$

$P(B|A_1)=0.98$，$P(B|A_2)=0.95$，$P(B|A_3)=0.92$

根据**全概率公式** $P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)$，代入数据计算：P(B)=0.9455.

（2）求合格品来自乙车间的概率

根据**贝叶斯公式** $P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}$，代入数据计算：

$$P(A_2|B)=\frac{0.35\times0.95}{0.9455}=\frac{0.3325}{0.9455}\approx0.3517$$

65、设随机变量 X 服从参数为 $\lambda=2$ 的泊松分布（即 X~P(2)），求：

（1）P(X=0)、 P(X=1)； （2）E(X)（数学期望）和 D(X)（方差）。

答案：

(1) 计算 $P(X=0)$ 和 $P(X=1)$

泊松分布的概率分布律为：$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ （$k=0,1,2,\dots$），其中 $\lambda=2$。

当 $k=0$ 时：$P(X=0)=\frac{2^0e^{-2}}{0!}=\frac{1\times e^{-2}}{1}=e^{-2}\approx 0.1353$

当 $k=1$ 时：$P(X=1)=\frac{2^1e^{-2}}{1!}=\frac{2\times e^{-2}}{1}=2e^{-2}\approx 0.2706$

(2) 计算 $E(X)$ 和 $D(X)$

对于泊松分布 $X\sim P(\lambda)$，其数字特征有固定结论：

数学期望 $E(X)=\lambda=2$

方差 $D(X)=\lambda=2$

66、设二维随机变量(X,Y)的联合分布律如下表所示：

$X \setminus Y$	1	2
0	0.2	0.3
1	0.4	0.1

求：X 和 Y 的边缘分布律。

答案：

X **的边缘分布律**：X 的可能取值为 0 和 1，边缘概率为对应行的和。
故 X 的边缘分布律为：

X	0	1
P	0.5	0.5

Y **的边缘分布律**：Y 的可能取值为 1 和 2，边缘概率为对应列的和。
故 Y 的边缘分布律为：

Y	1	2
P	0.6	0.4

67、从某批零件中随机抽取 16 个，测得其长度(单位:mm)的样本均值 =20.5，样本标准差 s= 1.2。假设零件长度服从正态分布 N(μ , σ ²)，其中 σ 未知，求总体均值 μ 的 95%置信区间(已知 $t_{0.025}(15)=2.131$)。

答案：

由于总体方差 σ^2 未知，且样本量 $n=16<30$，使用 **t 分布**构建置信区间，公式为：
$\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

由题意可知：

- 样本均值 $\bar{x}=20.5$
- 样本标准差 $s=1.2$
- 样本量 $n=16$，自由度 $df=n-1=15$
- 置信水平 $1-\alpha=0.95$，故 $\alpha=0.05$，$t_{\alpha/2}(15)=t_{0.025}(15)=2.131$

第一步，计算边际误差 E：

$$E=t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}=2.131 \times \frac{1.2}{\sqrt{16}}=2.131 \times \frac{1.2}{4}=2.131 \times 0.3=0.6393$$

第二步，构建置信区间：$\bar{x}-E \leq \mu \leq \bar{x}+E \implies 20.5-0.6393 \leq \mu \leq 20.5+0.6393$

即 19.8607≤ μ ≤21.1393。因此，总体均值 μ 的 95%置信区间为

(19.86,21.14)(保留两位小数)。

68、某品牌电池的说明书标明，其使用寿命(单位:小时)服从正态分布 N(1000, σ^2)。现从一批电池中随机抽取 25 个，测得样本均值=980，样本标准差 s=50。在显著性水平 a=0.05 下，检验该批电池的平均使用寿命是否低于 1000 小时(已知 $t_{0.05}(24)=1.711$)。

答案：

步骤 1：提出假设，$H_0: \mu = 1000$，$H_1: \mu < 1000$。

步骤 2：用 t 检验统计量，公式为$t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$。

步骤 3：代入数据计算得$t = -2$。

步骤 4：确定拒绝域为$t < -t_{0.05}(24) = -1.711$。

步骤 5：因为$t = -2 < -1.711$，拒绝H_0，即该批电池平均使用寿命低于 1000 小时。

69、一盒子中有 6 只红球，4 只白球。从中不放回地依次取两只球。

求：（1）两次都取到红球的概率；

（2）已知第一次取到的是红球，求第二次取到的也是红球的概率。

答案：

(1) 设事件 A 为“第一次取到红球”，事件 B 为“第二次取到红球”。

所求概率为 P(AB)。

P(AB) = P(A) × P(B|A) = (6/10) × (5/9) = 30/90 = 1/3

(2) 这是一个条件概率问题，所求为 P(B|A)。

在第一次已取到一只红球后，盒子剩下 9 只球，其中 5 只红球，4 只

白球。

因此，$P(B|A) = 5/9$。

70、 某厂有甲、乙、丙三条生产线，其产量占比分别为 25%，35%，40%。各生产线的次品率依次为 5%，4%，2%。现从总产品中随机抽取一件。

求：（1）该产品是次品的概率；

（2）若抽到的产品确是次品，求它是由甲生产线生产的概率。

答案：

设事件 A_1, A_2, A_3分别表示产品来自甲、乙、丙生产线。

事件 B 表示“抽到次品”。

已知：$P(A_1)=0.25, P(A_2)=0.35, P(A_3)=0.40$

$P(B|A_1)=0.05, P(B|A_2)=0.04, P(B|A_3)=0.02$

(1) 根据全概率公式，抽到次品的总概率为：

$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$

$= (0.25\times0.05) + (0.35\times0.04) + (0.40\times0.02)$

$= 0.0125 + 0.014 + 0.008$

$= 0.0345$

(2) 这是一个贝叶斯公式问题，所求为 $P(A_1|B)$。

$P(A_1|B) = P(A_1B) / P(B) = [P(A_1)P(B|A_1)] / P(B)$

$= (0.25 \times 0.05) / 0.0345$

$= 0.0125 / 0.0345$

≈ 0.3623

71、某射手对一目标独立地进行 4 次射击，每次击中目标的概率为 0.8。设随机变量 X 表示击中目标的次数。

求：（1）X 的分布律；

（2）X 的数学期望 E(X)和方差 D(X)。

答案：

这是一个典型的二项分布问题，X ~ B(4, 0.8)。

(1) X 的分布律为：

$P(X=k) = C_4^k (0.8)^k (0.2)^{4-k}$, (k=0,1,2,3,4)

具体写为：

$P(X=0) = C_4^0 (0.8)^0(0.2)^4 = 1×1×0.0016 = 0.0016$

$P(X=1) = C_4^1 (0.8)^1(0.2)^3 = 4×0.8×0.008 = 0.0256$

$P(X=2) = C_4^2 (0.8)^2(0.2)^2 = 6×0.64×0.04 = 0.1536$

$P(X=3) = C_4^3 (0.8)^3(0.2)^1 = 4×0.512×0.2 = 0.4096$

$P(X=4) = C_4^4 (0.8)^4(0.2)^0 = 1×0.4096×1 = 0.4096$

(2) 二项分布的期望和方差公式：

$E(X) = n p = 4 × 0.8 = 3.2$

$D(X) = n p (1-p) = 4 × 0.8 × 0.2 = 0.64$.

72、设连续型随机变量 X 的概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}kx^2, & 0\le x\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：（1）常数 k 的值；

（2）概率 $P(1 < X < 1.5)$；

（3）数学期望 $E(X)$。

答案：

(1) 根据概率密度函数的规范性（全域积分为 1），有：

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^2 kx^2\,dx = (k/3)\,x^3\ |_0^2 = (k/3) \times 8 = 1$

解得：$8k/3 = 1 \to k = 3/8$

(2) $P(1 < X < 1.5) = \int_1^{1.5} f(x)\,dx = \int_1^{1.5} (3/8)x^2\,dx$

$= (3/8) \times (1/3)\,x^3\ |_1^{1.5} = (1/8)\,[\,(1.5)^3 - (1)^3\,]$

$= (1/8)\,[3.375 - 1] = (1/8)\times 2.375 = 0.296875$

(3) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = \int_0^2 x \times (3/8)x^2\,dx = (3/8)\int_0^2 x^3\,dx$

$= (3/8) \times (1/4)\,x^4\ |_0^2 = (3/32) \times 16 = 1.5.$

73、 已知某地区成年男性的身高 X（单位：cm）服从正态分布 $N(172, 5^2)$。

求：（1）该地区成年男性身高在 167cm 到 177cm 之间的概率；

（2）若要求身高最高的 10%男性进入篮球队，身高标准应定为多少？

（附：$\Phi(1)=0.8413$, $\Phi(0.5)=0.6915$, $\Phi^{-1}(0.9)\approx 1.282$）

答案：

已知 $X \sim N(172, 25)$，即$\mu=172$, $\sigma=5$。

(1) $P(167 < X < 177) = P(\,(167-172)/5 < (X-\mu)/\sigma < (177-172)/5\,)$

$= P(\,-1 < Z < 1\,)$ （其中 Z 为标准正态变量）

$= \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] = 2\Phi(1) - 1$

$= 2\times 0.8413 - 1 = 0.6826$

(3) 设身高标准为 h。即求 $P(X > h) = 0.1$ 时的 h 值。

$P(X \le h) = 0.9$

$P((X-172)/5 \le (h-172)/5) = 0.9$

即 $\Phi((h-172)/5) = 0.9$

查表或题示，$\Phi^{-1}(0.9) \approx 1.282$

因此，$(h-172)/5 \approx 1.282$

解得：$h \approx 172 + 5\times1.282 = 172 + 6.41 = 178.41$ cm

身高标准应定为约 178.4cm。

74、 设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

其中$\theta>0$ 为未知参数。设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自该总体的一个样本。

求参数θ的矩估计量。

答案：

矩估计法的主要思想是用样本矩来估计总体矩。

首先，求总体的一阶原点矩（即数学期望）：

$E(X) = \int_0^1 x \cdot f(x;\theta)\, dx = \int_0^1 x \cdot \theta x^{\theta-1} dx = \theta \int_0^1 x^\theta\, dx$

$= \theta \cdot [1/(\theta+1)] \cdot x^{\theta+1} \big|_0^1 = \theta / (\theta+1)$

令总体矩等于样本矩（样本均值）：

$E(X) = A_1 = (1/n) \Sigma X_i$

即：$\theta / (\theta+1) = \bar{X}$ （$\bar{X}$表示样本均值）

解这个关于θ的方程：

$\theta = \bar{X}(\theta+1)$

$\theta = \bar{X}\theta + \bar{X}$

$\theta - \bar{X}\theta = \bar{X}$

$\theta(1 - \bar{X}) = \bar{X}$

因此，θ的矩估计量为：

$\hat{\theta} = \bar{X} / (1 - \bar{X})$

75、甲、乙两人独立地向同一目标各射击一次，甲的命中率为 0.8，乙的命中率为 0.7。

求：（1）两人都命中目标的概率；

（2）目标被击中的概率；

（3）已知目标被击中，求它是被甲命中的概率。

答案：

设事件 A 为“甲命中”，事件 B 为“乙命中”。则 P(A)=0.8, P(B)=0.7，且 A 与 B 独立。

(1) 两人都命中的概率为：

$P(AB) = P(A)P(B) = 0.8 \times 0.7 = 0.56$

(2) 目标被击中，意味着至少一人命中。用对立事件（两人都未命中）计算更简便。

P(目标被击中) = 1 - P(两人都未命中) = 1 - $P(\bar{A}\bar{B})$

由于独立性，$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = (1-0.8)\times(1-0.7) = 0.2\times0.3 = 0.06$

因此，P(目标被击中) = 1 - 0.06 = 0.94

(3) 这是一个条件概率问题，所求为 P(A | 目标被击中)。

P(A | 目标被击中) = P(A ∩ “目标被击中”) / P(目标被击中)

事件 A 发生且目标被击中，即“甲命中”（乙中或不中都行）。

所以 P(A ∩ “目标被击中”) = P(A) = 0.8

因此，P(A | 目标被击中) = 0.8 / 0.94 ≈ 0.8511.

76、在三个箱子中，第一箱装有 4 个黑球和 1 个白球，第二箱装有 3 个黑球和 3 个白球，第三箱装有 3 个黑球和 5 个白球。先随机抽取一个箱子（每个箱子被抽中的概率相同），再从该箱中随机抽取一球。

求：（1）抽出的球是白球的概率；

（2）若已知抽出的球是白球，求它来自第二箱的概率。

答案：

设事件 A_1, A_2, A_3 分别表示“抽中第一、二、三箱”，$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=1/3$。

设事件 B 表示“抽出白球”。

则：$P(B|A_1)=1/5$, $P(B|A_2)=3/6=1/2$, $P(B|A_3)=5/8$

(1) 根据全概率公式：

$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$

$= (1/3 \times 1/5) + (1/3 \times 1/2) + (1/3 \times 5/8)$

$= (1/15) + (1/6) + (5/24)$

计算通分（120 为公分母）：$= (8/120) + (20/120) + (25/120) = 53/120$

≈ 0.4417

(2) 这是一个贝叶斯公式问题，所求为 $P(A_2|B)$。

$P(A_2|B) = [P(A_2)P(B|A_2)] / P(B) = (1/3 \times 1/2) / (53/120)$

$= (1/6) \times (120/53) = 20 / 53 \approx 0.3774.$

77、设随机变量 X 的分布律为：

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.3	0.4	0.1

求：（1）E(X)和 $E(X^2)$；

（2）D(X)；

（3）Y = 2X - 1 的分布律和 E(Y)。

答案：

(1) $E(X) = \Sigma x_i p_i = (-1)\times0.2 + 0\times0.3 + 1\times0.4 + 2\times0.1 = -0.2 + 0 + 0.4 + 0.2 = \mathbf{0.4}$

$E(X^2) = \Sigma x_i^2 p_i = (-1)^2\times0.2 + 0^2\times0.3 + 1^2\times0.4 + 2^2\times0.1 = 1\times0.2 + 0 + 1\times0.4 + 4\times0.1 = 0.2+0.4+0.4 = \mathbf{1.0}$

(2) $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1.0 - (0.4)^2 = 1.0 - 0.16 = \mathbf{0.84}$

(3) Y = 2X - 1，根据X的取值计算Y并保持概率不变。

X=-1时，$Y=2\times(-1)-1=-3$, P=0.2

X=0时，$Y=2\times0-1=-1$, P=0.3

X=1时，$Y=2\times1-1=1$, P=0.4

X=2时，$Y=2\times2-1=3$, P=0.1

所以Y的分布律为：

Y	-3	-1	1	3
P	0.2	0.3	0.4	0.1

78、设连续型随机变量 X 的概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}a+bx^2, 0\le x\le 1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$$

且已知 E(X)=3/5。

求：（1）常数 a 和 b 的值；

（2）概率 P(X > 0.5)。

答案：(1) 由规范性 $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ 和期望 $E(X) = \int_0^1 x f(x)\,dx = 3/5$ 联立解得：

a = 3/5, b = 6/5

(2) 将 a, b 代入密度函数，计算积分：

$P(X > 0.5) = \int_{0.5}^{1} (3/5 + (6/5)x^2)\,dx = 0.65.$

79、 已知某批零件的长度 X（单位：mm）服从正态分布 $N(50, 0.5^2)$。

求：（1）随机抽取一个零件，其长度在 49.5mm 到 50.5mm 之间的概率；

（2）如果随机抽取 16 个零件，求它们的平均长度在 49.8mm 到 50.2mm 之间的概率。

（附：Φ(1)=0.8413， Φ(2)=0.9772，Φ(1.6)≈0.9452 ）

答案：(1) 标准化计算：$P(49.5 < X < 50.5) = P(-1 < Z < 1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$

(2) 样本均值 $\bar{X} \sim N(50, (0.5/\sqrt{16})^2) = N(50, 0.125^2)$

$P(49.8 < \bar{X} < 50.2) = P(-1.6 < Z < 1.6) = 2\Phi(1.6) - 1 \approx 0.8904.$

80、某工厂生产一批零件，根据长期生产数据可知其长度（单位：mm）服从正态分布 $N(\mu, 0.15^2)$。现从新生产的一批零件中随机抽取 25 个，测得平均长度为 20.5mm。问在显著性水平$\alpha=0.05$ 下，能否认为这批零件的平均长度与以往的设计标准$\mu_0=20.4$mm 有显著差异？

答案：

建立假设：

$H_0: \mu = 20.4$

$H_1: \mu \neq 20.4$

计算检验统计量：

$Z = (20.5 - 20.4) / (0.15/5) = 0.1 / 0.03 \approx 3.333$

决策：

$|Z| = 3.333 > Z_{0.025} = 1.96$

拒绝原假设 H_0

结论：在$\alpha=0.05$ 水平下，这批零件的平均长度与设计标准 20.4mm 存在显著差异。